VARIEDADES DIFERENCIABLES EN EL ESPACIO EUCLIDEO.
Formas diferenciales. Curso académico 2020-2021.

1. Sean $\omega \in \bigwedge^1(M)$ y $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Demostrar que en una referencia local $(U, \varphi = (x_1, .., x_n))$ se verifica

$$X[\omega(Y)] - Y[\omega(X)] - \omega([X,Y]) = \frac{\partial \omega_\nu}{\partial x_\mu}(X^\mu Y^\nu - X^\nu Y^\mu)$$

y deducir que

$$X[\omega(Y)] - Y[\omega(X)] - \omega([X,Y]) = d\omega(X,Y).$$

2. En $\mathbb{R}^2$ se consideran los campos y formas siguientes:

$$X = \left(x^2 + y\right)\frac{\partial}{\partial x} + \left(y^2 + 1\right)\frac{\partial}{\partial y},\ Y = (y-1)\frac{\partial}{\partial x}$$
$$\omega = \left(2xy + x^2 + 1\right)dx + \left(x^2 - y\right)dy.$$

Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ (u,v,w) \mapsto \left(u - v, v^2 + w\right)$.
Determinar $[X,Y]_{(0,0)}$, $\omega(X)_{(0,0)}$ y $f^*\omega$.

3. Hallar la región del plano $\mathbb{R}^2$ en la cual las formas

$$\omega_1 = xdx + ydy,\ \omega_2 = ydx + xdy$$

son linealmente independientes y hallar la referencia móvil $\{X, Y\}$ correspondiente.

4. Demostrar que la restricción a la esfera $\mathbb{S}^3$ de la forma

$$\omega = xdy - ydx + zdt - tdz$$

no es idénticamente nula.
[Indicación: Tener en cuenta la propiedad geométrica de los campos en la esfera.].

5. Para cada $X \in \mathfrak{X}(M)$ se define el operador L_X de la forma siguiente

$$L_X(f) = X(f),\ L_X(Y) = [X,Y],\ L_X(\omega) = X \lrcorner\, d\omega + d(X \lrcorner\, \omega),$$

donde $f \in \mathcal{F}(M), Y \in \mathfrak{X}(M)$ y $\omega \in \Omega^r(M)$. Demostrar las siguientes propiedades:

   (a) $[L_X, L_Y](f) = L_{[X,Y]}f,\ \forall f \in \mathcal{F}(M)$
   (b) $[L_X, L_Y](Z) = L_{[X,Y]}Z,\ \forall Z \in \mathfrak{X}(M)$
   (c) $[L_X, L_Y](\omega) = L_{[X,Y]}\omega,\ \forall \omega \in \Omega^r(M)$

6. Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(M)\,,\ f, g \in \mathcal{F}(M)\,,\ \omega \in \Omega^1(M)$. Entonces

   (a) $L_{fX}Y = fL_XY - df(Y)\,X$

   (b) $L_{fX}\omega = fL_X\omega + \omega(X)\,df$

   (c) $L_{fX}g = fL_Xg$.

7. Sea $\omega = xyz\,(dx + dy + dz) \in \Omega^1\left(\mathbb{R}^3\right)$ y $X \in \mathfrak{X}\left(\mathbb{R}^3\right)$.

   (a) Hallar la condición para que
   $$X \lrcorner\, d\omega = 0.$$

   (b) ¿Puede tenerse simultáneamente
   $$X \lrcorner\, \omega = X \lrcorner\, d\omega = 0?$$

8. Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$ y en una referencia local $(U, \varphi = (x_1, .., x_n))$ defínase $\omega \in \Omega^{n-1}(M)$
   $$\omega(X_1, .., X_{n-1}) := \det(X, X_1, .., X_{n-1})$$

   (a) Demostrar que ω está bien definida y deducir su expresión local.

   (b) Calcular $d\omega$ y dar una interpretación geométrica al resultado.

9. En la esfera $\mathbb{S}^2$ se consideran las proyecciones estereográficas $(U, \varphi_N = (u, v))$ y $(V, \varphi_S = (x, y))$ desde el polo norte y sur, respectivamente. Sea $\omega \in \Omega^1(U)$ dada por
   $$\omega = \frac{u}{1 + u^2 + v^2}\, du \wedge dv$$
   Hallar la expresión local de ω en la referencia local $(V, \varphi_S = (x, y))$.

10. Sea $A = \left(a^{ij}\right) \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ una matriz y defínase $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^n)$ mediante la expresión
    $$\omega = a^{ij} x_i dx_j$$

    (a) determinar condiciones para que ω sea cerrada (esto es, $d\omega = 0$).

    (b) ¿Existe alguna función $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $df = \omega$?